



HAL
open science

Actions et obligations : des options qui s'ignorent.

Axel Pierru, Alessandro Mauro

► **To cite this version:**

Axel Pierru, Alessandro Mauro. Actions et obligations : des options qui s'ignorent. : Cahiers du CEG, n° 31. 1999. hal-02437338

HAL Id: hal-02437338

<https://ifp.hal.science/hal-02437338>

Preprint submitted on 13 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Centre Économie et Gestion

**Actions et obligations :
des options qui s'ignorent**

Axel PIERRU
*Alessandro MAURO**

janvier 1999

Cahiers du CEG - n° 31

*économiste à la Scuola Superiore Enrico Mattei (ENI, Milan)

ÉCOLE DU PÉTROLE ET DES MOTEURS
Centre Économie et Gestion
228-232, avenue Napoléon Bonaparte

92852 RUEIL-MALMAISON CEDEX
télécopieur : 01 47 52 70 66 - téléphone : 01 47 52 64 10

La collection "Cahiers du CEG" est un recueil de présentations de travaux réalisés au Centre Économie et Gestion de l'École du Pétrole et des Moteurs, Institut Français du Pétrole, travaux de recherche ou notes de synthèse. Elle a été mise en place pour permettre la diffusion de ces travaux, parfois sous une forme encore provisoire, afin de susciter des échanges de points de vue sur les sujets abordés.

Les opinions émises dans les textes publiés dans cette collection doivent être considérées comme propres à leurs auteurs et ne reflètent pas nécessairement le point de vue de l'École du Pétrole et des Moteurs ou de l'IFP.

Pour toute information complémentaire, prière de contacter :

Nathalie ALBA-SAUNAL tél. : 01 47 52 64 10

The "Cahiers du CEG" is a collection of articles carried out at the Center for Economics and Management of the IFP School, Institut Français du Pétrole. It is designed to promote an exchange of ideas on the topics covered.

The opinions expressed are the sole responsibility of the author(s) and do not necessarily reflect the views of the IFP School or IFP.

For any additional information, please contact :

Nathalie ALBA-SAUNAL tél. : + 33 1 47 52 64 10

Si certaines théories économiques ont pu désespérément être en quête d'une pratique, la théorie des options s'est à l'inverse révélée doublement fructueuse. Développée au début des années 70, elle a permis l'évaluation d'actifs conditionnels (les options proprement dites) négociés sur les marchés (financiers ou de matières premières). Mais son champ d'application ne cesse de s'étendre et l'on découvre une nature optionnelle à un nombre croissant d'actifs.

Prenons l'exemple d'actifs physiques tels que des réserves pétrolières non développées (Paddock, Siegel et Smith, 1988). Développer ces réserves revient à exercer une option dont le prix du sous-jacent serait la valeur des réserves développées, le prix d'exercice le coût de développement, l'échéance la date de restitution du gisement, ... En règle générale, un investissement risqué revêt une nature optionnelle s'il présente une irréversibilité (des coûts induits), une flexibilité (dans la date de sa réalisation) et une incertitude (sur les recettes ou les coûts). Une part importante de la littérature économique traite de ce sujet dénommé *Real option analysis* par les anglo-saxons.

Cet article est consacré à des actifs financiers dont la nature optionnelle peut sembler paradoxale, à savoir les capitaux propres (actions) et la dette capitalisée (obligations). Son ambition est de présenter au lecteur une synthèse de travaux réalisés sur le sujet tout en soulignant les applications potentielles*

Dans une première partie, nous montrerons, sur un cas simplifié, qu'être actionnaire d'une firme endettée équivaut à détenir une option d'achat sur la valeur de l'entreprise, cette option ayant le montant de remboursement de la dette comme prix d'exercice et son échéance comme maturité.

Calculer la valeur de cette option équivaut à déterminer la valeur économique de la responsabilité limitée de l'actionnaire en cas de défaillance de la société. Parallèlement, les créanciers seront décrits comme vendeurs d'une option de vente. Ainsi les actionnaires, détenteurs d'une option, devraient être favorables, contrairement aux créanciers, à un accroissement du risque d'activité de la firme. L'approche optionnelle nous permettra de retrouver l'égalité entre valeur de marché de l'entreprise et somme de la dette et des capitaux propres. Un calcul du taux d'intérêt de cette dette sera rendu possible.

Dans une deuxième partie, nous étudierons la cohérence sous certaines hypothèses de cette approche avec celles du MEDAF et de Modigliani et Miller. Nous retrouverons que le coût moyen pondéré du capital est indépendant du ratio d'endettement. L'influence de divers facteurs (maturité de la dette, taux d'intérêt, volatilité des actifs de l'entreprise, ...) sur le risque systématique de la firme sera étudiée.

Les troisième et quatrième parties seront consacrées aux tentatives de résolution des difficultés soulevées par l'implémentation pratique du modèle. La complexité du financement d'une entreprise, ainsi que l'impossibilité d'une évaluation directe de certains paramètres, rendent non-opérationnel le modèle simplifié précédemment développé. Deux types de démarches seront présentées :

* Les auteurs tiennent à remercier Marc Chesney, professeur de finance à HEC, pour les remarques enrichissantes dont il leur a fait part.

- l'emploi de modèles pour options composées permettant de mieux rendre compte de la complexité du financement de la firme ; les concepts de dette prioritaire et de dette garantie seront étudiés ;
- l'utilisation du modèle de Black et Scholes avec une simplification des paramètres nécessaires (endogénéisation de la volatilité, calcul d'une duration pour l'échéance de la dette, ...).

En conclusion, nous mettrons l'accent sur les applications possibles de cette approche optionnelle qui permet de calculer la volatilité des actifs et le coût du capital d'une entreprise donnée.

I - ANALYSE EN TERMES OPTIONNELS DU FINANCEMENT DE L'ENTREPRISE

La nature optionnelle des actions et des obligations émises par une firme a été pour la première fois mise en évidence par Fischer Black et Myron Scholes en 1973 dans un article intitulé *The pricing of options and corporate liabilities*. Divers auteurs ont repris et développé cette analyse.

1) La responsabilité limitée de l'actionnaire

Nathalie Mourgues (1991, 1993) a procédé à une étude détaillée du sujet et le lecteur pourra, pour plus d'information, se reporter à ses articles.

La théorie des options permet d'analyser sous l'angle contractuel la relation qui lie les actionnaires aux créanciers. La création de la société par action a érigé l'entreprise en entité juridique distincte et limité la responsabilité de l'entrepreneur au montant des capitaux engagés. Aujourd'hui le principe de responsabilité limitée des actionnaires à l'égard des créanciers est généralisé. Cette responsabilité limitée a une valeur économique qui peut être analysée par l'approche optionnelle.

2) Étude d'un cas de financement simplifié

Considérons une entreprise financée par une émission unique d'actions et d'obligations. Ces obligations, dont la valeur boursière représente la dette capitalisée, sont supposées ne payer aucun intérêt avant la date T de remboursement, date à laquelle intérêts composés et principal sont versés. Il s'agit ainsi de zéro-coupons. Par ailleurs, aucun dividende n'est distribué avant la date T.

a) Description en termes optionnels de la position de l'actionnaire

Quelle peut être la situation de l'actionnaire à la date T d'échéance de la dette ?

Deux possibilités :

- La valeur de marché de l'entreprise (V_T) est supérieure au montant de remboursement de la dette (D) ; l'actionnaire peut encaisser la différence entre ces deux valeurs ($V_T - D$).
- La valeur de marché de l'entreprise est inférieure au montant de remboursement de la dette ; l'actionnaire renonce à ses droits, il y a défaillance de l'entreprise vis-à-vis des créanciers.

Le profil de gain de l'actionnaire ($\max(0, V_T - D)$) est parfaitement analogue à celui du détenteur d'une option d'achat sur la valeur de marché V de l'entreprise, avec comme prix d'exercice le montant D du remboursement de la dette et comme maturité l'échéance T de cette dette. Cette échéance étant unique, l'option est européenne (elle ne peut être exercée avant T).

La position de l'actionnaire peut être interprétée d'une autre manière :

- achat de l'actif à un prix égal au montant du remboursement de la dette actualisé au taux sans risque (De^{-rT}) ;
- financement de cet achat par un emprunt effectué au taux sans risque et remboursable en T ;
- achat d'une option de vente sur la valeur de l'entreprise, exerçable en T et dont le prix d'exercice est le montant de remboursement de la dette.

La combinaison de ces trois opérations fournit un profil de gain identique à celui de l'actionnaire. Cette deuxième description, en termes optionnels, des capitaux propres, peut sembler moins simple que la précédente (elle ne sera d'ailleurs plus utilisée par la suite). Néanmoins, au lecteur peu familiarisé avec les options, elle paraîtra plus cohérente avec la description que nous allons faire de la position du créancier.

b) Description de la position du créancier et calcul du taux d'intérêt

À l'échéance de la dette, le créancier, qui a investi dans les obligations émises par la firme, obtiendra au mieux le montant de remboursement prévu. Il n'aura que la valeur de marché de la firme si celle-ci est inférieure à ce montant (l'actionnaire abandonnant tout droit en cas de défaillance de l'entreprise). Le créancier a donc un profil de gain égal à $\min(D;V_T)$.

La position du créancier peut être décrite par la combinaison de deux opérations :

- prêt, au taux sans risque, du montant prévu de remboursement actualisé au taux sans risque (De^{-rT}) ;
- vente d'une option de vente sur la valeur de l'entreprise, exerçable en T et dont le prix d'exercice est le montant de remboursement de la dette.

Si, à l'échéance, la valeur de l'actif est supérieure au prix d'exercice (montant prévu de remboursement) alors l'option de vente n'est pas exercée et le créancier est simplement remboursé de son prêt au taux sans risque (montant de ce remboursement : D).

Dans la situation inverse ($V_T < D$), le créancier est remboursé de D mais subit par ailleurs une perte $V_T - D$ due à l'exercice de l'option de vente. Son gain total est V_T .

Le créancier prête une certaine somme à l'entreprise. Supposons déjà fixé le montant D du remboursement à l'échéance. Si le risque de défaillance n'existait pas, la somme prêtée serait de De^{-rT} . Du fait de ce risque de défaillance, le créancier est comme vendeur d'une option de vente à l'actionnaire. La valeur P de cette option vient donc en réduction de la somme qui aurait été prêtée au taux sans risque. Le créancier va ainsi prêter $De^{-rT} - P$ en échange du remboursement D. On peut en déduire le taux d'intérêt de ce prêt (qui sera supérieur à r).

c) Remarques préliminaires

L'analyse descriptive effectuée permet trois remarques préliminaires :

1. Des options d'achat et de vente européennes, portant sur le même sous-jacent et de mêmes échéance et prix d'exercice, sont liées par une relation (obtenue par arbitrage) appelée "parité put/call": $V = C - P + De^{-rT}$

avec : V prix du sous-jacent aujourd'hui
C valeur du call (option d'achat)
P valeur du put (option de vente)
D prix d'exercice des options
T date d'échéance des options

Cette relation, mise en évidence par Stoll en 1969, est bien connue des praticiens. Nous pouvons la réinterpréter dans le contexte de notre étude :

V est la valeur de marché des actifs de la firme

C est la valeur boursière des capitaux propres

$-P + De^{-rT}$ est la valeur boursière de la dette

Nous retrouvons ainsi l'égalité entre la valeur de marché de l'entreprise et la somme des valeurs boursières de la dette et des capitaux propres (Copeland et Weston, 1988).

2. Les actionnaires, détenteurs d'une option, sont avantagés par une augmentation de la volatilité de la valeur de l'entreprise (un accroissement de l'écart type du montant des cash flows générés), ce qui peut sembler irréaliste quand la volatilité atteint des valeurs très élevées. Inversement, les créanciers, vendeurs d'une option, sont désavantagés par cette augmentation. Les actionnaires et les créanciers ont donc des intérêts conflictuels : les premiers sont a priori tentés (éventuellement à l'insu des seconds) d'orienter l'entreprise vers des projets risqués. Une telle situation est susceptible d'induire des coûts d'agence élevés.
3. Comparer une action à une option d'achat implique une augmentation de la valeur de cette action en cas de hausse du taux d'intérêt sans risque (rendement d'une obligation d'état). Il semble que ce phénomène soit compatible avec ce qui peut être observé à un niveau agrégé sur les marchés : lorsque les rendements obligataires sont élevés, les investisseurs tendent à alléger leurs portefeuilles d'actions pour acquérir des obligations, ce qui induit une baisse simultanée du prix des actions et des rendements obligataires (l'augmentation de la demande en obligations entraînant une hausse du prix de ces dernières).

d) Application de la formule de Black-Scholes

Black et Scholes (1973) ont développé un modèle d'évaluation d'option applicable dans le contexte de l'exemple simplifié présenté jusqu'ici. S , valeur de marché des capitaux propres, est ainsi donné par la formule suivante :

$$S = VN[d_1] - De^{-rT}N[d_2]$$

- Les notations déjà adoptées gardent la même signification :

V est la valeur de marché (aujourd'hui) des actifs de l'entreprise, D la valeur nominale (comptable) de la dette qui doit être remboursée à l'échéance T , r le taux d'intérêt sans risque;

- σ_V est l'écart type instantané de V , d_1 et d_2 sont des fonctions de (V, D, T, r, σ_V) ;

- $N[d_1]$ est la valeur en d_1 de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Si, en T , la valeur V_T de l'entreprise est plus élevée que le remboursement prévu D , alors les actionnaires décideront de payer D et leur gain sera $V_T - D$. Si V était constant et l'exercice de l'option certain, alors la valeur de S serait tout simplement $V - De^{-rT}$. L'incertitude sur la valeur de V_T nous oblige à utiliser la formule de Black-Scholes dans laquelle V et De^{-rT} sont pondérés par différentes valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

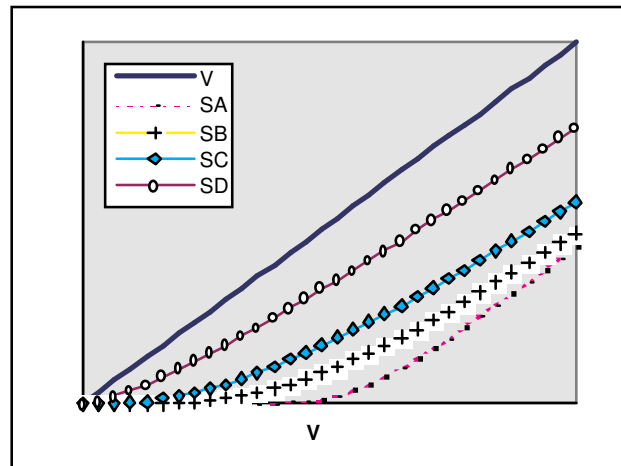
On peut montrer que :

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma_V} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial V} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial D} < 0, \quad \frac{\partial S}{\partial T} > 0$$

Nous retrouvons avec les deux premières dérivées que la valeur de l'action est une fonction croissante du taux d'intérêt sans risque et de l'écart type du rendement des actifs (avec ce que cela peut impliquer en terme de conflit potentiel entre actionnaires et créanciers : une fois la dette contractée, les actionnaires seront incités à investir dans des actifs accroissant le risque global de l'entreprise ; ce phénomène est connu sous le nom de "*problème de substitution des actifs*" (Jensen et Meckling, 1976)).

Les trois autres dérivées débouchent sur des résultats intuitifs : la valeur de l'action est une fonction croissante de celle des actifs et de l'échéance de la dette ; inversement, elle est une fonction décroissante du montant prévu du remboursement de la dette.

L'étude d'un exemple permet de fournir une illustration de ces résultats :



Les quatre courbes (S_A, S_B, S_C, S_D) représentent l'évolution de la valeur des capitaux propres en fonction de celle des actifs de l'entreprise, ceci pour différentes valeurs de la volatilité (avec $\sigma_A < \sigma_B < \sigma_C < \sigma_D$). La première bissectrice représente la valeur de V en fonction d'elle-même.

On peut observer que :

a) $S_A < S_B < S_C < S_D$.

b) Quand la volatilité devient élevée (σ_D), S devient une fonction quasi-linéaire de V .

c) Si $\sigma_V \rightarrow \infty$, $S \rightarrow V$: la valeur des capitaux propres tend vers celle de l'entreprise.

d) Pour de faibles valeurs de la volatilité (σ_A), quand V devient suffisamment grand, $S \rightarrow (V - D e^{-rT})$. En effet, le remboursement de la dette devient alors presque certain.

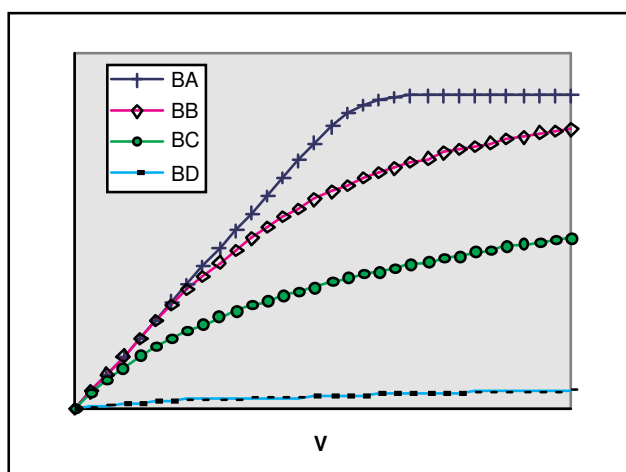
Connaissant S en fonction de V, σ_V, D, T et r , il est possible de déterminer B (valeur de marché de la dette) grâce à la relation $V = S + B$. On obtient :

$$\begin{aligned} B &= V \{1 - N[d_1]\} + D e^{-rT} N[d_2] \\ &= V N[-d_1] + D e^{-rT} N[d_2] \end{aligned}$$

La valeur de marché de la dette est ainsi une combinaison des sommes actuelles que les créanciers peuvent obtenir en cas de paiement de la dette ($D e^{-rT}$) ou en cas de défaillance (V).

De même que précédemment, il s'avère intéressant de procéder à une simulation. Les valeurs B_A, B_B, B_C, B_D ont été calculées en utilisant quatre volatilités différentes, avec $\sigma_A < \sigma_B < \sigma_C < \sigma_D$. Comme prévu, on observe que $B_A > B_B > B_C > B_D$.

Examinons le cas d'une très faible volatilité des actifs (σ_A). Si V est très élevé, la dette sera certainement remboursée et la valeur de B tend vers De^{-rt} . Inversement, si V est très bas, il y aura très probablement défaillance de l'entreprise et la valeur de la dette tend vers celle de la firme.



II - COHÉRENCE DE L'APPROCHE OPTIONNELLE AVEC LES PROPOSITIONS DE MODIGLIANI-MILLER ET AVEC LE MEDAF

En première partie, nous avons comparé les capitaux propres d'une entreprise endettée à une option d'achat sur la valeur de marché de cette entreprise, ou, ce qui revient au même, sur la valeur des capitaux propres d'une entreprise identique mais non endettée. Cette comparaison suppose implicitement une indépendance entre valeur de l'entreprise et structure de financement (en l'absence de fiscalité). Elle suppose donc vérifiée la première proposition de Modigliani et Miller (1958) (indépendance du coût du capital et du ratio d'endettement). La cohérence de l'approche optionnelle avec la deuxième proposition de Modigliani et Miller (coût des capitaux propres exprimé en fonction du levier d'endettement) et avec le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF) sera étudiée. Des résultats sur le risque systématique (bêta) d'une firme endettée seront dérivés. L'ensemble des travaux présentés ici sont originellement dus à Hsia (1978, 1981). Ils ont été repris par divers auteurs (dont Copeland et Weston, 1988). Soulignons que l'un des premiers auteurs à s'intéresser à la cohérence entre évaluation de biens contingents et théorème de Modigliani et Miller fut Merton (1977). Celui-ci démontra que deux entreprises dont seule la structure financière différait (avec versement continu d'un coupon pour l'entreprise endettée et le versement d'un dividende du même montant pour l'entreprise non endettée) avaient, à tout instant, des valeurs égales. L'indépendance entre valeur de l'entreprise et ratio d'endettement est ainsi prouvée même en présence d'un risque de faillite.

1 - Indépendance entre coût du capital et ratio d'endettement

Comme le soulignent Copeland et Weston, l'utilisation d'une version en temps continu du modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) s'avère nécessaire (nous allons en effet utiliser des processus de diffusion qui requièrent des transactions en temps continu).

Voici une version dérivée par Merton (1973) :

$$E(R_i) = R_f + (E(R_M) - R_f)\beta_i$$

$E(R_i)$: rendement instantané attendu pour l'actif i

R_f : taux de rendement (non stochastique) d'un actif sans risque

$E(R_M)$: rendement instantané attendu du portefeuille de marché

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\text{Var } R_M} \text{ (sensibilité du rendement de l'actif i au risque systématique)}$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse que la valeur de l'entreprise suit un processus de diffusion de type brownien géométrique :

$$dV = \mu V dt + \sigma_V V dW$$

μ est appelée dérive

σ_V est appelée volatilité

dW est un incrément de Wiener

S , valeur des capitaux propres, est une fonction de V et de t

$$S \equiv S(V, t)$$

Plutôt que d'utiliser directement le lemme d'Ito (outil de différenciation des processus de diffusion) nous allons procéder de façon intuitive par analogie :

Il suffit d'écrire un développement en série de Taylor pour S :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial V} dV + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} (dV)^2 + \dots$$

Nous allons conserver les termes de premier ordre par rapport au temps. Or, $(dV)^2 = (\mu V dt + \sigma_V V dW)^2$ et dW est du même ordre que $(dt)^{1/2}$. Le seul terme du premier ordre de $(dV)^2$ est donc $\sigma_V^2 V^2 dt$.

Nous pouvons ainsi écrire :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \sigma_V^2 V^2 dt + \frac{\partial S}{\partial V} dV$$

On a donc (Copeland et Weston, 1988) :

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dS}{S} = \frac{\partial S}{\partial V} \frac{dV}{S}$$

$$dt \rightarrow 0$$

or $\frac{dS}{S}$ correspond au taux de rendement instantané des capitaux propres (que l'on notera r_S) et $\frac{dV}{V}$ au taux de rendement instantané des actifs de l'entreprise (que l'on notera r_V).

On a ainsi :

$$r_S = \frac{\partial S}{\partial V} \frac{V}{S} r_V$$

En écrivant :

$$\beta_S = \frac{\text{cov}(r_S, r_M)}{\text{var}(r_M)} \quad \beta_V = \frac{\text{cov}(r_V, r_M)}{\text{var}(r_M)}$$

On en déduit :

$$\beta_S = \frac{\partial S}{\partial V} \frac{V}{S} \beta_V$$

Si C_p est le coût des capitaux propres : $C_p = R_f + (R_M - R_f) \beta_S$ (par application du MEDAF)
(Nous omettrons à partir de maintenant l'opérateur espérance $E()$ afin d'alléger les notations)

En remplaçant β_S :

$$C_p = R_f + (R_M - R_f) \frac{\partial S}{\partial V} \frac{V}{S} \beta_V$$

De même on peut écrire pour la dette capitalisée (en notant B sa valeur de marché) :

$$\beta_d = \frac{\partial B}{\partial V} \frac{V}{B} \beta_V$$

En appliquant une deuxième fois le MEDAF et en notant C_d le coût de la dette nous obtenons :

$$C_d = R_f + (R_M - R_f) \frac{\partial B}{\partial V} \frac{V}{B} \beta_V$$

(cette relation est naturellement semblable à celle obtenue pour les capitaux propres).

Le coût moyen pondéré du capital de l'entreprise (que l'on dénommera k) est ainsi :

$$\begin{aligned} k &= \frac{S}{V} C_p + \frac{B}{V} C_d \\ &= \frac{S}{V} \left(R_f + (R_M - R_f) \frac{\partial S}{\partial V} \frac{V}{S} \beta_V \right) + \frac{B}{V} \left(R_f + (R_M - R_f) \frac{\partial B}{\partial V} \frac{V}{B} \beta_V \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{S+B}{V} \right) R_f + (R_M - R_f) \left(\frac{\partial S}{\partial V} + \frac{\partial B}{\partial V} \right) \beta_V$$

Or $S + B = V$ et $\frac{\partial S}{\partial V} + \frac{\partial B}{\partial V} = \frac{\partial (S+B)}{\partial V} = \frac{\partial V}{\partial V} = 1$

En définitive :

$$k = R_f + (R_M - R_f) \beta_V$$

i.e. $k = E(r_V)$

Le coût du capital de l'entreprise est ainsi indépendant de sa structure de financement et ne dépend que de β_V (et donc du rendement attendu des actifs de l'entreprise). Ceci confirme la cohérence du MEDAF avec la première proposition de Modigliani et Miller (en l'absence de fiscalité).

Les différents auteurs cités remplacent, au cours des calculs, $\frac{\partial S}{\partial V}$ et $\frac{\partial B}{\partial V}$ par les valeurs obtenues en partie à l'aide du modèle de Black-Scholes (respectivement $N[d_1]$ et $1 - N[d_1]$). Si $\frac{\partial S}{\partial V} = N[d_1]$ est directement obtenu par dérivation du modèle, $\frac{\partial B}{\partial V}$ est pris égal à $1 - \frac{\partial S}{\partial V}$ (en utilisant la relation de parité call/put ou simplement $B = V - S$), ce qui rend applicables les calculs précédents (sans que cela ne soit réellement dû à la théorie des options).

L'application du MEDAF aux coûts des capitaux propres et de la dette peut sembler moins évidente. Elle sous-entend une cohérence des processus suivis par S et B avec les hypothèses sous-jacentes à la version de MEDAF présentée, alors même que S est simultanément supposé être une option sur la valeur de l'entreprise, celle-ci suivant un brownien géométrique (hypothèse nécessaire au modèle de Black-Scholes). Aucun des auteurs cités n'étudie explicitement cette cohérence.

2 - Coût des capitaux propres et levier d'endettement

Nous avons :

$$C_p = R_f + (R_M - R_f) \beta_S \quad \text{et} \quad k = R_f + (R_M - R_f) \beta_V$$

$$\text{On en déduit : } (R_M - R_f) = \frac{C_p - R_f}{\beta_S} = \frac{k - R_f}{\beta_V}$$

$$\text{donc } C_p = R_f + (k - R_f) \frac{\beta_S}{\beta_V}$$

$$\text{En remplaçant } \beta_S \text{ par } \frac{\partial S}{\partial V} \frac{V}{S} \beta_V \quad \text{puis } \frac{\partial S}{\partial V} \text{ par } N[d_1]$$

$$C_p = R_f + (k - R_f) \frac{V}{S} N[d_1] = R_f + (k - R_f) \left(1 + \frac{B}{S}\right) N[d_1]$$

Le coût des capitaux propres est une fonction croissante du levier d'endettement. Ce résultat est cohérent avec la deuxième proposition de Modigliani et Miller.

3 - Influence de divers facteurs sur le risque systématique d'une firme endettée

$$\text{Il a été précédemment démontré que } \beta_S = \frac{\partial S}{\partial V} \frac{V}{S} \beta_V$$

En appliquant le modèle de Black-Scholes :

$$\frac{\partial S}{\partial V} = N[d_1] \text{ et } S = VN[d_1] - De^{-rT} N[d_2]$$

Il est ainsi possible d'exprimer β_S en fonction de V , σ_V , D , T , r et β_V .

On peut montrer (Hsia, 1981) que :

$$\frac{\partial \beta_S}{\partial V} < 0, \quad \frac{\partial \beta_S}{\partial D} > 0, \quad \frac{\partial \beta_S}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial \beta_S}{\partial \sigma^2} < 0, \quad \frac{\partial \beta_S}{\partial T} < 0$$

La sensibilité du rendement de l'action au risque systématique diminue lorsque :

- la valeur de l'entreprise augmente
- le montant prévu de remboursement de la dette diminue
- l'échéance de ce remboursement s'éloigne
- la variance de la valeur de l'actif augmente (ceci résulte de la nature optionnelle des capitaux propres)

III - L'ACTIONNAIRE DÉTENTEUR D'UNE OPTION COMPOSÉE

1 - L'action vue comme une option composée

Appliquer le modèle de Black-Scholes à l'évaluation de capitaux propres revient à supposer que l'endettement de l'entreprise se réduit à une dette "zéro-coupon", ce qui n'est pas réaliste. Les firmes émettent des obligations à coupons multiples et contractent des dettes de différentes échéances. Comme nous allons le voir, posséder les capitaux propres d'une firme endettée équivaut alors à détenir une *option composée* sur la valeur de l'entreprise.

On fait tout d'abord l'hypothèse d'un endettement remboursé en deux échéances, t^* et T , auxquelles l'entreprise doit respectivement payer les sommes x^* et D .

À la première échéance t^* , les actionnaires ont une option d'achat qu'ils peuvent exercer en payant aux créanciers la somme x^* . Toutefois, exercer cette option ne les rend pas propriétaires de l'entreprise car à l'échéance T un choix similaire s'impose à nouveau : ils peuvent exercer une deuxième option en payant la somme D aux créanciers. S'ils exercent cette deuxième option, ils deviennent propriétaires de l'entreprise. Cette deuxième option sera donc exercée si $V > D$. Ils ne pourront néanmoins prendre cette décision que s'ils ont exercé la première option au temps t^* . Cette première option ne sera elle-même exercée que si, au temps t^* , la valeur S^* de la deuxième option est supérieure au prix d'exercice x^* . La richesse en t^* des actionnaires est ainsi $\max(S^* - x^*, 0)$, S^* étant donné par la formule de Black-Scholes.

Les actionnaires sont détenteurs d'une option composée, c'est-à-dire d'une option d'achat écrite sur une autre option d'achat ; cette dernière étant écrite sur la valeur V de l'entreprise.

Geske, en supposant comme Black et Scholes que V était un brownien géométrique, a dérivé une formule évaluant une option composée. La valeur S de l'action vue comme une option composée est alors :

$$\begin{aligned} S = & V N_2 \left[h + \sigma_V \sqrt{t^*}, k + \sigma_V \sqrt{T}; \sqrt{t^*/T} \right] \\ & - D e^{-rT} N_2 \left[h, k; \sqrt{t^*/T} \right] \\ & - x^* e^{-rt^*} N[h]. \end{aligned}$$

où $N_2[\cdot]$ est la fonction de répartition de la loi normale bivariée, $\sqrt{t^*/T}$ le coefficient de corrélation, h et k sont des fonctions de $(V, x^*, D, r, \sigma_V, t^*, T)$.

L'interprétation intuitive de cette formule est similaire à celle que nous avons donnée pour la formule de Black-Scholes : si l'exercice des deux options était certain, la valeur des capitaux propres serait $S = V - D e^{-rT} - x^* e^{-rt^*}$, c'est-à-dire la valeur des actifs moins les valeurs actualisées des remboursements prévus.

On retrouve la solution de Black-Scholes (c'est-à-dire le cas d'une obligation zéro-coupon) si t^* et T coïncident.

D'une façon analogue, si $T \rightarrow \infty$, l'option composée dégénère en une simple option d'achat avec prix d'exercice x^* et échéance t^* .

De façon générale, la valeur de S évaluée comme une option composée est inférieure à la valeur de S évaluée comme une option simple d'achat avec prix d'exercice x^* et échéance t^* .

On peut démontrer (Geske, 1979) que :

$$\frac{\partial S}{\partial V} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial D} < 0, \quad \frac{\partial S}{\partial T} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \sigma_v^2} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x^*} < 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t^*} > 0$$

Les signes des cinq premières dérivées sont les mêmes que ceux obtenus avec la formule de Black-Scholes. Ceux des deux dernières étaient prévisibles.

La valeur de marché de la dette est :

$$\begin{aligned} B = V & \left\{ -N_2 \left[h + \sigma_v \sqrt{t^*}, k + \sigma_v \sqrt{T}; \sqrt{t^*/T} \right] \right\} \\ & + D e^{-rT} N_2 \left[h, k; \sqrt{t^*/T} \right] \\ & + x^* e^{-rt^*} N[h]. \end{aligned}$$

L'interprétation est similaire à celle déjà donnée dans le cas d'une obligation zéro-coupon. Il faut en plus tenir compte du fait que le remboursement de la deuxième dette (D) est conditionné par celui de la première dette (x^*). Deux obligations zéro-coupon sans risque peuvent être évaluées séparément. Par contre, nous devons utiliser un modèle d'évaluation d'option composée lorsqu'il existe un risque de défaillance de la part de l'entreprise et que le remboursement d'une des deux obligations est contingent à celui de l'autre.

Le paragraphe précédent était consacré au cas d'un endettement à deux échéances. L'approche développée se généralise à un endettement à N échéances. Entre l'avant-dernière et la dernière échéance, les actionnaires disposent de l'option 1 (dont le sous-jacent est la valeur de l'entreprise). Juste avant cette avant-dernière échéance, les actionnaires disposent d'une option 2 qui leur permet d'acquérir l'option 1. En fait, à chaque échéance n , les actionnaires ont une option d'achat qui, si exercée (par le paiement du coupon correspondant), leur permet d'acquérir l'option $N-n$ ($N-n$ représentant le nombre restant d'échéances). Cette interprétation de la position des actionnaires est originellement due à Black et Scholes (1973). Une formule a été développée par Geske, mais celle-ci se révèle très complexe à manier et implique l'utilisation de la fonction de répartition d'une loi normale n -variée, c'est-à-dire d'une dimension égale au nombre d'échéances de la dette. Geske a néanmoins démontré qu'il était possible de procéder à des simplifications si les coupons étaient payés à des intervalles de temps constants (la matrice des coefficients de corrélations est symétrique). L'intégrale de la densité d'une loi normale de dimension n est alors réduite à un produit d'intégrales de densité

de loi normale de dimension plus basse (Geske, 1977 ; Selby et Hodges, 1987).

2 - Cas d'une entreprise ayant contracté des dettes de différentes priorités

Nous venons d'évoquer le cas d'un endettement constitué de dettes d'échéances différentes. Nous allons maintenant analyser le cas d'un endettement constitué d'une dette dont le remboursement est prioritaire (que nous dénommerons "*senior dette*" (S.D.)) et d'une dette dont le remboursement est subordonné au précédent (que nous dénommerons "*junior dette*" (J.D.)). En d'autres termes, le remboursement de la J.D. ne sera effectué qu'après celui de la S.D.. La coexistence de ces deux types de dettes va nous amener à utiliser à nouveau les modèles de Black-Scholes et de Geske. Nous supposons d'abord que les deux dettes ont même échéance, puisqu'elles ont des échéances différentes.

Cas I : même échéance

Nous commençons avec un cas simplifié (Black et Cox, 1976), en supposant que l'entreprise doit payer la valeur nominale de la S.D., D_S , et la valeur nominale de la J.D., D_J , à la même échéance T . À cette échéance, selon la valeur finale de l'entreprise V^* , trois situations peuvent se présenter :

$V^* \leq D_S$ Il y a défaillance pour les deux dettes et la valeur de l'entreprise (V^*) va aux créanciers seniors. Les créanciers juniors et les actionnaires ne touchent rien.

$D_S < V^* \leq D_S + D_J$ La S.D. est intégralement remboursée. Les créanciers juniors subissent une défaillance partielle de l'entreprise et reçoivent $V^* - D_S$. Rien ne va aux actionnaires.

$D_S + D_J < V^*$ La valeur de l'entreprise est suffisante pour rembourser les deux dettes. Le montant $V^* - D_S - D_J$ va aux actionnaires.

Il apparaît clairement que la position des créanciers seniors ne dépend pas de la J.D. Le profil de gain de ces créanciers ne dépend que de $V^* - D_S$. Le modèle de Black-Scholes peut être ici utilisé de la même manière qu'il l'avait été précédemment. La valeur B_S de la S.D. est donc $B_S = V - S(D_S)$, où $S(D_S)$ est la valeur de l'option d'achat sur les actifs de l'entreprise (avec D_S pour prix d'exercice).

Nous avons ainsi :

$$B_s = VN[-d_1] + D_s e^{-rT} N[d_2]$$

Les actionnaires sont encore détenteurs d'une option d'achat, le prix d'exercice de cette option étant cette fois $D_S + D_J$. La valeur des capitaux propres est donc :

$$S(D_S + D_J) = VN[d'_1] - (D_S + D_J)e^{-rT}N[d'_2]$$

où d'_1, d'_2 sont les fonctions d_1, d_2 avec prix d'exercice $(D_S + D_J)$.

La position des créanciers de la J.D. est équivalente à l'achat et à la vente de deux options d'achat différentes. Ces créanciers achètent une option d'achat de prix d'exercice D_S et vendent une option d'achat de prix d'exercice $D_S + D_J$.

(on peut aussi simplement écrire $B_J + B_S + S(D_S + D_J) = V$)

Donc :

$$\begin{aligned} B_J &= V - S(D_S + D_J) - B_S \\ &= S(D_S) - S(D_S + D_J) \end{aligned}$$

La formule de Black-Scholes donne les valeurs de ces deux options et donc la valeur de la J.D. est :

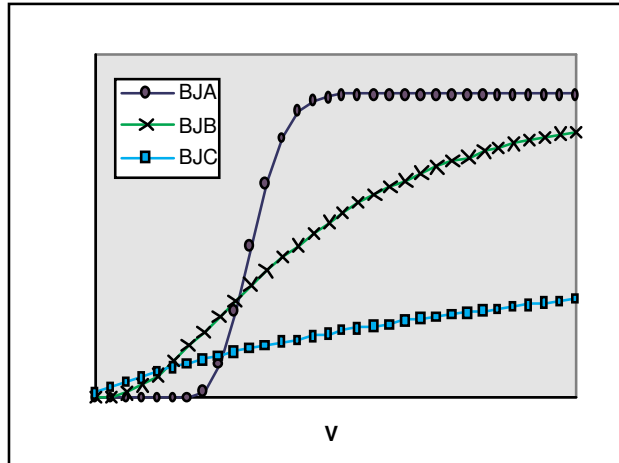
$$B_J = V \{N[d_1] - N[d'_1]\} - D_S e^{-rT} \{N[d_2] - N[d'_2]\} + D_J e^{-rT} N[d'_2]$$

Autant l'analyse de la S.D n'apporte rien de "neuf", autant celle de la J.D. fournit des résultats qui peuvent paraître étonnants: une augmentation du taux d'intérêt sans risque, ou de l'échéance, ou de σ_V , peut induire un accroissement de B_J ; nous pouvons ainsi avoir :

$$\frac{\partial B_J}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial B_J}{\partial T} > 0, \quad \frac{\partial B_J}{\partial \sigma_V} > 0$$

Le signe des deux premières dérivées partielles est, *a priori*, étrange pour une dette. Celui de la troisième est en opposition avec le "problème de substitution des actifs" précédemment évoqué : les détenteurs de la J.D. peuvent être favorables à un accroissement du risque de l'entreprise. Ces trois dérivées partielles sont positives quand V est petit (par rapport à $D_S + D_J$), c'est-à-dire quand la probabilité que la J.D. ne soit pas remboursée est élevée ; celle-ci devient alors similaire à l'action.

Le graphique suivant permet d'observer, sur une simulation, l'évolution de la valeur de la J.D. en fonction de celle de l'entreprise, ceci pour différentes volatilités. On obtient ainsi trois courbes $B_J A, B_J B, B_J C$ (avec $\sigma_A < \sigma_B < \sigma_C$)



Pour de faibles valeurs de V , B_J est une fonction apparemment croissante de la volatilité ($B_J A < B_J B < B_J C$); B_J est à l'inverse une fonction décroissante de la volatilité lorsque V est grand.

Lorsque V est suffisamment grand, $B_J A$ devient constant et égal à $D_J e^{-rT}$: la valeur V de l'entreprise est si élevée que le remboursement de la J.D. devient certain du fait de la faible volatilité.

Enfin, pour des valeurs de V très élevées, on peut observer que $B_J B \rightarrow B_J A$; le remboursement de la J.D. devenant certain, on observe alors une diminution de l'influence de la volatilité.

Cas II : différentes échéances

Un cas plus général consiste en la coexistence d'une dette prioritaire (S.D.) et d'une dette subordonnée (J.D.) d'échéances différentes (Geske, 1977). Cette fois, la valeur nominale de la S.D. (D_S) doit être remboursée à l'échéance T_S , celle de la J.D. (D_J) devant être remboursée à l'échéance T_J . Du fait de l'ordre de priorité entre les deux dettes, il est logique de supposer que $T_S < T_J$.

En T_J , si la valeur de l'entreprise V_{T_J} est supérieure à D_J , les créanciers de la J.D. sont remboursés et $V_{T_J} - D_J$ va aux actionnaires. Dans le cas contraire, la valeur V_{T_J} va aux créanciers juniors.

En T_S , la valeur des capitaux propres est :

$$S_{T_S} = V_{T_S} N[d_1] - D_J e^{-r(T_J - T_S)} N[d_2]$$

La valeur $B_{J_{T_S}}$ de la J.D. est égale à $V_{T_S} - S_{T_S}$, c'est-à-dire

$$B_{J_{T_S}} = V_{T_S} \{N[-d_1]\} + D_J e^{-r(T_J - T_S)} N[d_2]$$

En T_S , les actionnaires rembourseront la S.D. si $S_{T_S} > D_S$ (c'est-à-dire si $V_{T_S} > \bar{V}$ avec $S_{T_S}(\bar{V}) = D_S$). La valeur de la S.D. est aujourd'hui :

$$B_S = V \left\{ -N\left[h + \sigma_V \sqrt{T_S}\right] \right\} + D_S e^{-rT_S} N[h]$$

La valeur de la dette senior est indépendante de tout paramètre lié à la dette junior : les créanciers seniors assimilent les créanciers juniors aux actionnaires et considèrent que les deux groupes possèdent globalement l'équivalent d'une option d'achat sur la valeur de l'entreprise avec D_S pour prix d'exercice ; la somme des valeurs de la dette senior et de cette option est égale à la valeur de l'entreprise ; nous obtenons ainsi la valeur de B_S .

Geske fait l'hypothèse, très utilisée dans la littérature, que la dette senior est remboursée par une nouvelle émission de capitaux propres. Les "anciens" actionnaires pourront procéder à une telle émission si $S_{T_S} > D_S$. Dans le cas contraire, personne n'achètera de nouvelles actions, la somme à payer D_S étant supérieure à la valeur de la part de l'entreprise acquise. En effet, si $S_{T_S} > D_S$, il y aura une transformation de dette en capitaux propres et les "anciens" actionnaires ne devront rien payer. Donc leur position est équivalente à l'achat d'une option composée avec le premier prix d'exercice nul, comme le deuxième est égal à D_J . En définitif la valeur des capitaux propres (aujourd'hui) est :

$$S = V N_2\left[h + \sigma_V \sqrt{T_S}, k + \sigma_V \sqrt{T_J}, \sqrt{T_S/T_J}\right] - D_J e^{-rT_J} N_2\left[h, k, \sqrt{T_S/T_J}\right]$$

Enfin, la valeur B_J de la J.D. est donnée par $B_J = V - B_S - S$, c'est-à-dire :

$$B_J = V \left\{ N\left[h + \sigma_V \sqrt{T_S}\right] - N_2\left[h + \sigma_V \sqrt{T_S}, k + \sigma_V \sqrt{T_J}, \sqrt{T_S/T_J}\right] \right\} + D_J e^{-rT_J} N_2\left[h, k, \sqrt{T_S/T_J}\right] - D_S e^{-rT_S} N[h]$$

3 - Endettement constitué d'une dette prioritaire et d'une dette garantie par une partie des actifs

Nous avons déjà étudié les concepts de *dette senior* et *dette junior*. Celui de "*dette garantie*" nous permet d'étudier un autre type de dette. Il s'agit d'une dette dont le paiement est garanti par une partie des actifs de l'entreprise. En cas de défaillance, ces actifs seront exclusivement utilisés au remboursement de la dette garantie.

À titre d'exemple, supposons que l'entreprise ait seulement deux types de dette :

- une dette garantie, de valeur nominale D_G ; les actifs servant de garantie ont une valeur G (celle-ci pouvant suivre un processus stochastique) ;
- une dette qui n'est pas garantie, de même échéance mais avec priorité pour le remboursement de sa valeur nominale D_P ;

V est la valeur de l'entreprise (V inclut G). Il y a défaillance si à l'échéance $V^* < D_G + D_P$; nous pouvons distinguer deux cas :

$V^* - G \geq D_P$ La valeur nominale D_P de la dette sans garantie (mais prioritaire) est complètement remboursée, tandis que pour la dette garantie le remboursement sera $V^* - D_P$ ($\geq G$).

$V^* - G < D_P$ Les créanciers de la dette sans garantie reçoivent $V^* - G$. La garantie G va à ceux de la dette garantie.

Donc, à l'échéance, on peut représenter la position des créanciers de la dette garantie par la formule $\min\{D_G, \max[V^* - D_P, G]\}$ ou de façon équivalente :

$$D_G - \max\{D_G - \max[V^* - D_P, G], 0\}$$

En considérant la possibilité de défaillance, il est évident que le paiement reçu par les créanciers de la dette garantie ne sera pas toujours égal à D_G . En effet ceux-ci sont vendeurs d'une *option de vente écrite sur le maximum entre $V^* - D_P$ et G* . Ce type particulier d'option a été étudié par Stulz (1982), qui a calculé les valeurs d'options écrites sur le maximum ou le minimum des valeurs de deux actifs, en supposant que les processus suivis étaient des browniens géométriques.

IV - MISE EN PRATIQUE DE L'APPROCHE OPTIONNELLE : LA DÉMARCHE DE C. HSIA

Aussi intéressante que puisse être l'interprétation en termes optionnels de la position de l'actionnaire, celle-ci n'en demeure pas moins confinée au plan conceptuel. Il faudra attendre 1991, presque 20 ans après la naissance de cette branche de la littérature, pour que Hsia présente des travaux pouvant déboucher sur des applications empiriques.

Les auteurs précédents avaient tenté de représenter la réalité (*i.e.* un endettement à échéances multiples) par l'emploi de modèles d'évaluation d'option composée. Malheureusement, ces modèles se révèlent assez lourds à manier. La démarche de Hsia est différente : plutôt que de choisir un modèle supposé figurer la complexité du financement de l'entreprise, conservons (au moins en première approche) le modèle de Black-Scholes mais adaptons les paramètres qui doivent être utilisés afin qu'ils puissent représenter la structure financière réelle de la firme.

Intéressons-nous aux emprunts. Hsia remarque que la structure d'endettement d'une entreprise est souvent stable au cours du temps, ainsi que le service annuel de la dette. La dette d'une entreprise est donc analogue à un coupon annuel perpétuel. Le premier paramètre recherché (l'échéance T de la dette) doit en tenir compte. L'auteur suggère d'utiliser la duration de ce coupon perpétuel. La duration peut être interprétée comme une maturité moyenne de la dette, chaque date d'échéance t étant pondérée par la valeur actuelle du coupon correspondant divisée par la valeur actuelle totale de la dette.

On peut remarquer que la duration d'un zéro-coupon est bien égale à sa maturité. Si la valeur de marché de la dette agrégée est B et si le service annuel de cette dette est A , alors on montre que la duration de la dette de l'entreprise est B / A . L'échéance T ne dépend ainsi que de deux paramètres directement observables.

Le deuxième paramètre recherché est le prix d'exercice devant être utilisé dans le modèle de Black-Scholes. La démonstration de Hsia s'appuie sur la théorie de l'immunisation. L'échéance T a été prise égale à la duration de la dette. Or un portefeuille de titres est immunisé contre le risque de taux si ce portefeuille est conservé pendant une durée égale à sa duration. En T , le montant de remboursement (de rachat) de la dette doit être égal à la valeur de celle-ci, c'est-à-dire Be^{iT} , avec $i = A / B$ (taux d'intérêt de la dette) et $T = B / A$. Finalement le prix d'exercice est $D = Be$ ($e \approx 2.718$).

La question des dividendes est abordée : pour Hsia, l'actionnaire est à la fois celui qui détient l'option sur la valeur de l'entreprise et celui qui recevra les dividendes si ceux-ci sont versés ; il semblerait ainsi que l'actionnaire soit simultanément donneur et receveur des dividendes ; l'objectif étant d'évaluer la richesse des actionnaires, il n'est donc pas utile de prendre explicitement en compte les versement de dividendes. Ceci est en contradiction avec la position de Black et Scholes (1973) qui soulignent au contraire l'influence de versements de dividendes sur la répartition de la valeur de l'entreprise entre actionnaires et créanciers.

La difficulté majeure réside dans la détermination de σ_V , l'écart-type du rendement de la valeur de l'entreprise. Un tel paramètre ne peut être directement observé, Hsia parvient

néanmoins à en donner une définition endogène (par une fonction implicite). En effet, employer le modèle de Black-Scholes pour évaluer la valeur S des capitaux propres revient à déterminer S en fonction du taux d'intérêt sans risque r , d'une échéance B/A , d'un prix d'exercice B_e , de la valeur V de l'entreprise et de σ_V . Or $V = B + S$. Il existe donc une fonction implicite f déterminant σ_V en fonction de A , B , S et r .

Cette fonction est :

$$f(A, B, S, r, \sigma_V) = \frac{B}{S} - \frac{N(-d_1)}{N(d_1) - e^{[(A-rB)/A]} N(d_2)} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad d_1 &= \left\{ \left[\ln(1 + S/B) - 1 + (rB/A) \right] / \sigma_V \sqrt{B/A} \right\} + (\sigma_V \sqrt{B/A}) / 2 \\ d_2 &= d_1 - \sigma_V \sqrt{B/A} \end{aligned}$$

σ_V peut être calculé par itérations.

L'approche optionnelle nous permet ainsi de déterminer la volatilité des actifs détenus par une entreprise donnée. Les quatre paramètres nécessaires (valeurs des capitaux propres et de la dette, service annuel de la dette, taux d'intérêt sans risque) sont aisément observables.

Hsia montre que l'on peut également évaluer le coût du capital d'une entreprise.

La version intertemporelle du MEDAF est tout d'abord appliquée au coût i de la dette et au coût r_V du capital de l'entreprise (ces calculs sont analogues à ceux du II 2), l'opérateur espérance $E(\)$ est ici aussi omis).

$$\begin{aligned} i &= r + (r_M - r) \beta_d \\ r_V &= r + (r_M - r) \beta_V \end{aligned}$$

$$\text{d'où } r_M - r = \frac{(i - r)}{\beta_d} = \frac{(r_V - r)}{\beta_V} \quad \text{on a ainsi: } r_V = r + \frac{\beta_V}{\beta_d} (i - r)$$

or il a été démontré dans la deuxième partie de cet article que $\beta_d = \frac{\partial B}{\partial V} \frac{V}{B} \beta_V$

$$\text{et que } \frac{\partial B}{\partial V} = 1 - N(d_1) = N(-d_1)$$

$$\text{Nous avons ainsi : } r_V = r + (i - r) \frac{B}{VN(-d_1)}$$

Finalement, en remplaçant i par A/B et V par $S+B$ on obtient :

$$r_v = r + \left(\frac{A}{B} - r \right) \frac{B}{(B+S)N(-d_1)} \quad (2)$$

par un raisonnement similaire, on peut calculer le coût des capitaux propres en fonction des mêmes paramètres :

$$C_p = r + \left(\frac{A}{B} - r \right) \left(\frac{B}{S} \right) \left(\frac{N(d_1)}{N(-d_1)} \right) \quad (3)$$

Pour une entreprise donnée, il est ainsi possible d'estimer la volatilité σ_v à l'aide de l'équation (1) et d'évaluer ensuite le coût de son capital ainsi que celui de ses capitaux propres avec (2) et (3).

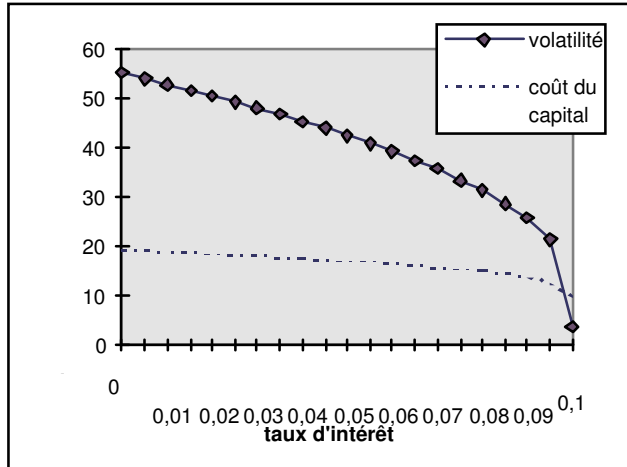
L'exemple présenté ci-dessous est celui donné par Hsia :

A	1 000 000	f(A,B,S,r, σ v)
B	10 000 000	0,00084
S	15 000 000	
r	0,08	Coût du Capital %
σv	0,313	15,174
		Coût de la dette %
RUN		10
		Coût des cap. propres %
		18,623

Avant d'appliquer ce modèle à des données réelles, il est intéressant de procéder à des simulations afin d'étudier la sensibilité du coût du capital aux variations des variables prises comme exogènes (A, B, S et r).

première simulation : variation du taux d'intérêt sans risque

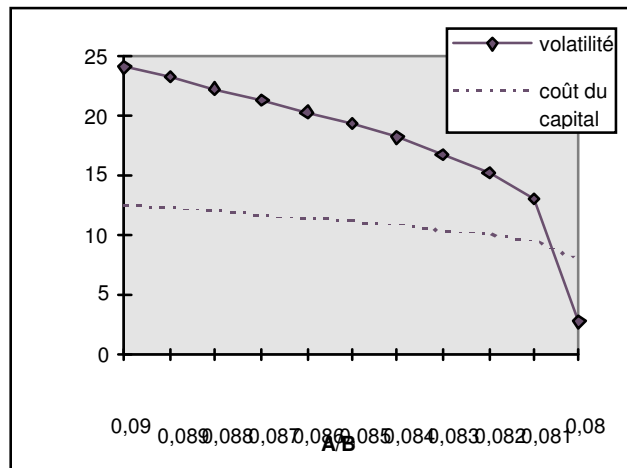
Nous conservons A=1 000 000, B=10 000 000, S=15 000 000. Le taux d'intérêt r va décrire l'intervalle $[0; A/B = 0.1]$ (avec des incréments de 0.005). Pour $r = A/B$ une discontinuité est observée et pour $r > A/B$, la fonction f ne converge pas en zéro. L'évolution de la volatilité et celle du coût du capital sont données dans la figure ci-dessous :



En maintenant la structure financière, on observe que la volatilité et le coût du capital diminuent lorsque le taux d'intérêt sans risque augmente.

Deuxième simulation : variation du ratio A/B

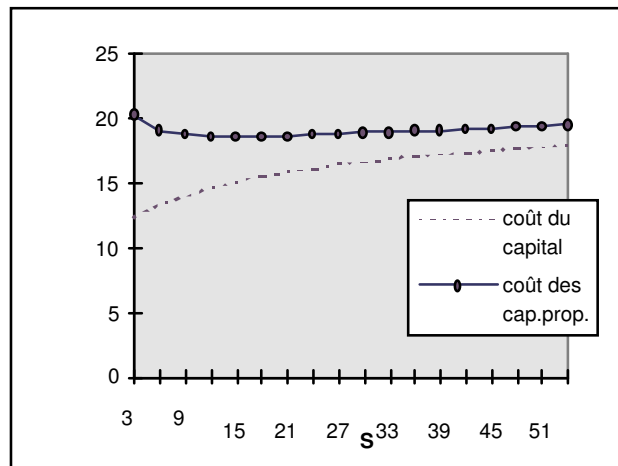
Nous maintenons A , S et r constants ($A=1\ 000\ 000$, $S=15\ 000\ 000$, $r=0.08$), en faisant varier B ; les ratios A/B et S/B changent ainsi de valeur. Si $A/B < r$, le même problème de convergence que celui observé dans la première simulation se pose pour f . Nous avons choisi d'effectuer la simulation sur l'intervalle $[0.08(=r); 0.09]$. Cet intervalle peut paraître réduit, mais l'allure des courbes (voir figure ci-dessous) demeure semblable pour des valeurs plus élevées de A/B .



On observe que lorsque A/B diminue, la décroissance de la volatilité est plus importante que celle du coût du capital (ce dernier diminuant presque linéairement).

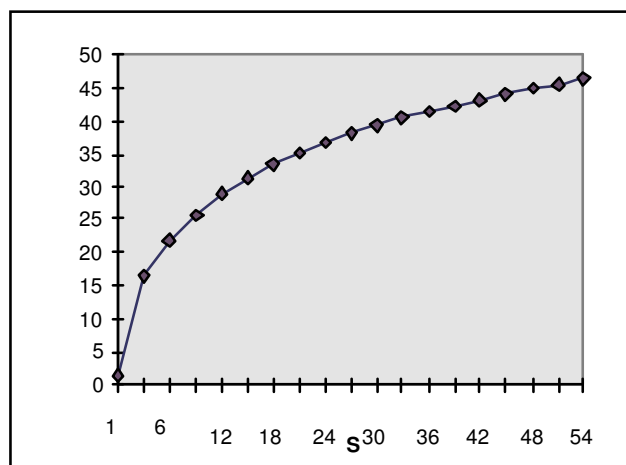
troisième simulation : variation de la valeur de S

A, B et r sont maintenus constants ($A=1\ 000\ 000$, $B=10\ 000\ 000$, $r=0.08$). La valeur de S varie dans l'intervalle $[0;54\ 000\ 000]$, avec des incréments de $3\ 000\ 000$; à nouveau, le rapport S/B est modifié. La fonction f n'est pas définie pour $S=0$; on peut observer que pour des valeurs très faibles de S , le coût des capitaux propres devient élevé.



Quand S croît, le coût des capitaux propres commence par décroître, puis assez rapidement sa pente s'inverse et il se met à croître lentement. À l'inverse, le coût du capital croît toujours et semble tendre vers le coût des capitaux propres, tout en restant inférieur à celui-ci. On peut constater la limite de cet exercice de simulation dans lequel on ne change qu'une seule variable "toutes choses égales par ailleurs" : la première proposition de Modigliani et Miller (invariance du coût du capital) n'est jamais vérifiée ; la seconde ne l'est que pour des valeurs très basses des capitaux propres.

L'évolution de la volatilité est donnée par la figure suivante :



La croissance de celle-ci est de plus en plus faible quand la valeur des capitaux propres augmente.

Conclusion

L'approche optionnelle ne doit pas rester confinée au plan conceptuel. Elle devrait au contraire se révéler riche en applications : évaluation de la volatilité d'actifs, du coût du capital, de celui des capitaux propres, ... Il pourrait être intéressant, pour une entreprise donnée, de comparer la valeur obtenue du coût du capital avec celle réellement utilisée. Le fait que la fiscalité n'ait pas été introduite est sans conséquence si la méthode utilisée par la firme implique l'emploi d'un coût du capital avant impôt (le lecteur pourra consulter l'ouvrage de Babusiaux (1990) pour la présentation et l'analyse de la méthode *shadow interest*). Une difficulté survient lorsqu'une partie de la dette de l'entreprise n'est pas cotée (seule la valeur comptable est alors connue). La volatilité mesurée est implicite, elle représente ainsi une anticipation des agents économiques à l'instant t . L'étude des variations des cours boursiers, en liaison avec l'information disponible, peut éclairer la façon dont se forment les anticipations des agents et la perception que ceux-ci ont du risque.

BIBLIOGRAPHIE

Babusiaux, D., (1990), “*Décision d’investissement et calcul économique dans l’entreprise*”, Éd. Economica.

Black, F., Cox, J., (1976), “Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions”, *Journal of Finance*, Vol. 31 (May), pp. 351-368.

Black, F., Scholes, M.J., (1973), “The pricing of options and corporate liabilities”, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, n° 3 (May-June), pp. 637-654.

Copeland, T.E., Weston, J.F., (1988), “*Financial Theory and Corporate Policy*”, Addison-Wesley Publishing Company.

Geske, R., (1977), “The valuation of corporate liabilities as compound options”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (November), pp. 541-552.

Geske, R., (1979), “The valuation of compound options”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7 (March), pp. 63-81.

Hsia, C.C., (1981), “Coherence of the modern theories of finance”, *Financial Review*, n° 16 (Winter), pp. 27-42.

Hsia, C.C., (1991), “Estimating a firm’s cost of capital: an option pricing approach”, *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol. 18, n° 2 (January), pp. 281-287.

Jensen, M.C., Meckling, W.H., (1976), “Theory of the firm: managerial behavior, agency costs and ownership structure”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 3.

Merton, R.C., (1973), “An intertemporal capital asset pricing model”, *Econometrica*, Vol. 41, n° 5 (September), pp. 867-887.

Merton, R.C., (1977), “On the pricing of contingent claims and the Modigliani-Miller theorem”, *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 241-249.

Miller, M., Modigliani, F. (1958), “The cost of capital, corporation finance and the theory of investment”, *American Economic Review* 48.

Mourgues, N., (1993), “*Financement et coût du capital de l’entreprise*”, Éd. Economica.

Mourgues, N., (1991), “L’analyse du financement de l’entreprise selon la théorie des options”, *Revue française d’économie*, vol. 4 (automne).

Paddock, J.L., Siegel D.R., Smith J.L., (1988), “Option valuation of claims on real assets: the case of offshore petroleum leases”, *Quarterly Journal of Economics*, n° 103 (August) pp. 479-508.

Selby, M.J.P., Hodges, S.D., (1987), “On the evaluation of compound options”, *Management Science*, Vol. 33, n° 3 (March), pp. 347-355.

Stulz, R.M., (1982), “Options on the minimum or the maximum of two risky assets”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 10, pp. 161-185

Déjà parus

CEG-1. D. PERRUCHET, J.-P. CUEILLE,

Compagnies pétrolières internationales : intégration verticale et niveau de risque.
Novembre 1990

CEG-2. C. BARRET, P. CHOLLET,

Canadian gas exports: modeling a market in disequilibrium.
Juin 1990

CEG-3. J.-P. FAVENNEC, V. PREVOT,

Raffinage et environnement.
Janvier 1991

CEG-4. D. BABUSIAUX,

Note sur le choix des investissements en présence de rationnement du capital.
Janvier 1990

CEG-5. J.-L. KARNIK,

Les résultats financiers des sociétés de raffinage distribution en France 1978-89.
Mars 1991

CEG-6. I. CADORET, P. RENOUE,

Élasticités et substitutions énergétiques : difficultés méthodologiques.
Avril 1991

CEG-7. I. CADORET, J.-L. KARNIK,

Modélisation de la demande de gaz naturel dans le secteur domestique : France, Italie, Royaume-Uni
1978-1989.
Juillet 1991

CEG-8. J.-M. BREUIL,

Émissions de SO₂ dans l'industrie française : une approche technico-économique.
Septembre 1991

CEG-9. A. FAUVEAU, P. CHOLLET, F. LANTZ,

Changements structurels dans un modèle économétrique de demande de carburant.
Octobre 1991

CEG-10. P. RENOUE,

Modélisation des substitutions énergétiques dans les pays de l'OCDE.
Décembre 1991

CEG-11. E. DELAFOSSE,

Marchés gaziers du Sud-Est asiatique : évolutions et enseignements.
Juin 1992

CEG-12. F. LANTZ, C. IOANNIDIS,

Analysis of the French gasoline market since the deregulation of prices.
Juillet 1992

CEG-13. K. FAID,

Analysis of the American oil futures market.

Décembre 1992

CEG-14. S. NACHET,

La réglementation internationale pour la prévention et l'indemnisation des pollutions maritimes par les hydrocarbures.

Mars 1993

CEG-15. J.-L. KARNIK, R. BAKER, D. PERRUCHET,

Les compagnies pétrolières : 1973-1993, vingt ans après.

Juillet 1993

CEG-16. N. ALBA-SAUNAL,

Environnement et élasticités de substitution dans l'industrie ; méthodes et interrogations pour l'avenir.

Septembre 1993

CEG-17. E. DELAFOSSE,

Pays en développement et enjeux gaziers : prendre en compte les contraintes d'accès aux ressources locales.

Octobre 1993

CEG-18. J.P. FAVENNEC, D. BABUSIAUX,*

L'industrie du raffinage dans le Golfe arabe, en Asie et en Europe : comparaison et interdépendance.

Octobre 1993

CEG-19. S. FURLAN,

L'apport de la théorie économique à la définition d'externalité.

Juin 1994

CEG-20. M. CADREN,

Analyse économétrique de l'intégration européenne des produits pétroliers : le marché du diesel en Allemagne et en France.

Novembre 1994

CEG-21. J.L. KARNIK, J. MASSERON,*

L'impact du progrès technique sur l'industrie du pétrole.

Janvier 1995

CEG-22. J.P. FAVENNEC, D. BABUSIAUX,

L'avenir de l'industrie du raffinage.

Janvier 1995

CEG- 23. D. BABUSIAUX, S. YAFIL,*

Relations entre taux de rentabilité interne et taux de rendement comptable.

Mai 1995

CEG-24. D. BABUSIAUX, J. JAYLET*,

Calculs de rentabilité et mode de financement des investissements, vers une nouvelle méthode ?

Juin 1996

CEG-25. J.P. CUEILLE, J. MASSERON*,

Coûts de production des énergies fossiles : situation actuelle et perspectives.

Juillet 1996

CEG-26. J.P. CUEILLE, E. JOURDAIN,

Réductions des externalités : impacts du progrès technique et de l'amélioration de l'efficacité énergétique.

Janvier 1997

CEG-27. J.P. CUEILLE, E. DOS SANTOS,

Approche évolutionniste de la compétitivité des activités amont de la filière pétrolière dans une perspective de long terme.

Février 1997

CEG-28. C. BAUDOIN, J.P. FAVENNEC,

Marges et perspectives du raffinage.

Avril 1997

CEG-29. P. COUSSY, S. FURLAN, E. JOURDAIN, G. LANDRIEU, J.V. SPADARO, A. RABL,

Tentative d'évaluation monétaire des coûts externes liés à la pollution automobile : difficultés méthodologiques et étude de cas.

Février 1998

CEG-30. J.P. INDJEHAGOPIAN, F. LANTZ, V. SIMON,

Dynamique des prix sur le marché des fiouls domestiques en Europe.

Octobre 1998

Le **Centre Économie et Gestion (CEG)**, sous la direction de Denis Babusiaux, a pour objet d'assurer :

- La formation de jeunes diplômés à la maîtrise des techniques économiques et de gestion. Celle-ci est assurée par trois programmes distincts :
 - Le cycle **Économie et Gestion de l'Entreprise (EGE)**, destiné à des ingénieurs diplômés ou à des étudiants de formation scientifique de niveau équivalent, débouche au terme d'une scolarité de 16 mois sur l'attribution du diplôme d'ingénieur de l'École du Pétrole et des Moteurs.
 - Le cycle **Petroleum Economics and Management (PEM)**, organisé en collaboration avec les universités Colorado School of Mines et Texas A&M, se déroule en partie à l'École du Pétrole et des Moteurs et en partie au sein de l'une ou l'autre de ces universités. La formation, d'une durée de 16 mois, conduit à l'obtention de deux diplômes : le Master of Science de l'université américaine correspondante et un diplôme de l'École du Pétrole et des Moteurs (diplôme d'ingénieur ou Mastère Spécialisé).
 - Le **DEA Économie de l'Énergie**, organisé conjointement avec l'Université de Bourgogne et l'Université Panthéon-Assas. Les candidats doivent être titulaires d'une maîtrise (sciences économiques, économétrie, gestion), d'un diplôme d'ingénieur, d'un diplôme d'école de commerce ou posséder un diplôme jugé équivalent.

Le **Mastère Spécialisé en Politique et Gestion de l'Énergie** peut être délivré à l'issue d'un cursus s'appuyant sur des cours dispensés dans le cadre de l'un des programmes présentés ci-dessus et sur un stage ou une micro-thèse de recherche d'une durée minimale de quatre mois.

- Une activité de recherche qui permet à des étudiants de réaliser une thèse de doctorat dans un des divers domaines de l'économie de l'énergie. Les doctorants français ou ressortissants de l'Union Européenne admis sur des postes de thèse peuvent recevoir une allocation de recherche de la part de l'École du Pétrole et des Moteurs.
- La formation et le perfectionnement du personnel de l'industrie pétrolière et des industries associées. Cette formation se déroule sous forme de stages inter- ou intra-entreprise ou de modules plus longs, mais peut également prendre la forme de parcours individuels de formation pour s'adapter à des besoins plus spécifiques.

* une version anglaise de cet article est disponible sur demande